

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH
TRƯỜNG THPT TÂN CHÂU



**ĐỀ CƯƠNG
GIỮA HỌC KÌ II TOÁN 11**



TỔ: TOÁN
Năm học: 2020-2021

GIẢI TÍCH

CHƯƠNG V: GIỚI HẠN

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Kiến thức cần nhớ:

1) Giới hạn hữu hạn:

a) $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$

b) $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$

c) $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$

d) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (nếu $\lim v_n \neq 0$)

e) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

f) $\lim ku_n = k \lim u_n$

Đặc biệt:

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$

d) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

2) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) là: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$ với $|q| < 1$

3) Giới hạn vô cực:

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$

Đặc biệt:

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

Bài tập

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{4n+1}{2n-7}$

b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{-2n^2+1}$

c) $\lim \frac{2n+5n^3-3}{3n^3-n^2}$

Bài 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{(2-3n)^3(n+1)^2}{1-4n^5}$

b) $\lim \frac{n(2n-1)(3n-2)}{(7-2n)^3}$

c) $\lim \frac{4n^5-n^2+1}{(2n+1)(3-n)^2(n^2+2)}$

Bài 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^2-2\sqrt{n}+8}{-n^2+3\sqrt{n}-7}$

b) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{\sqrt[3]{8n^3-2}}$

c) $\lim \frac{\sqrt{1+4n^2}}{1-2n}$

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n+5}{n \cdot 3^n}$

b) $\lim \frac{4^n+3}{3 \cdot 4^n+1}$

c) $\lim \frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$

d) $\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Bài 5: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt{n^2 + 2n} - n + 2)$ b) $\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})$ c) $\lim(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n)$

Bài 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$ b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+1}}{3n+2}$ c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1} - 2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1} - n}$

Bài 7: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 - 2n^2 + 3n - 5)$ b) $\lim(-3n^4 + 2n^3 - 1)$ c) $\lim(-n^2 + n\sqrt{n} + 1)$

Bài 8: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^3 - 5}$ b) $\lim \frac{n^3 - 4n + 2}{2n^2 + 5}$ c) $\lim \frac{3n^5 - n^2 + 5n - 7}{4n^3 + 6n - 2}$

Bài 9: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{(n^2+1)^2}{7n-4+2n^2}$ b) $\lim \frac{(n+1)(4-2n)}{n+3n^2-1}$ c) $\lim \frac{(n-1)^3(n+1)}{(2n^2+1)(3n+1)^2}$

Bài 10: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$ b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$ c) $\lim \frac{n^2+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ d) $\lim \frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$
e) $\lim \frac{2n+1}{n^3+4n^2+3}$ f) $\lim \frac{2n^2-n+3}{-3n^2+2n+1}$ g) $\lim \frac{n^4+1}{2n^4+n+1}$

Bài 11: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ b) $\lim \frac{(3-5n)^2(n+2)^2}{1-7n^2+10n^4}$ c) $\lim \frac{2n(3-n^2)}{(1+n)(-2n+5)^2}$

Bài 12: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{\sqrt{n^4-2n+3}}{-2n^2+3}$ b) $\lim \frac{n\sqrt{n}+2}{n^2+n\sqrt{2n}+1}$ c) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$

Bài 13: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2-5n}{3n \cdot 4^n}$ b) $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$ c) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$
d) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 - 5^n}$ e) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$ f) $\lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

Bài 14: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt{n^2-n} - n)$ b) $\lim(\sqrt{n^2-n} + n)$ c) $\lim(\sqrt{n^2-n+3} - n)$
d) $\lim(\sqrt[3]{n-n^3} + n + 2)$ e) $\lim(\sqrt{4n^2-3n+1} - 2n)$
f) $\lim \sqrt{n+5}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1})$ g) $\lim(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1} - n)$

Bài 15: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1}{n+1-\sqrt{n^2+2}}$ b) $\lim \frac{\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}}{n+1}$ c) $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n} - \sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{9n^2+1} - n}$
d) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3} - 2n+1}{\sqrt{n^2+2n} - n}$ e) $\lim \frac{n(\sqrt[3]{4-n^3} + n)}{\sqrt{4n^2+1} - 2n}$

Bài 16: Tính các giới hạn sau:

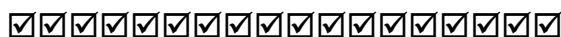
a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$ b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$ c) $\lim(n^4 - 3n^3 + n - 2)$

Bài 17: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(n^2 - \frac{2}{n+1} \right)$ b) $\lim \frac{-3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$ c) $\lim \frac{3n^3 + n^2 + 1}{2n - n^2}$

Bài 18: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2^n + 3^n}{5^n - 2^n}$ b) $\lim \frac{3^n + 2 \cdot 7^n}{4 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n}$ c) $\lim \frac{6 \cdot 3^n - 7}{4 + 9^n}$
 d) $\lim \frac{(n+1)^{2010} (2n^2 - 1)}{2n^{2012} + 7n - 8}$ e) $\lim \frac{3^{2n+1} + 4^n + 2^{3n+2}}{3 \cdot 6^n - 5 + 4 \cdot 9^n}$ f) $\lim \frac{(3^n - 1)(2^n + 3)}{2 \cdot 6^n + 3 \cdot 4^n}$



BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Kiến thức cần nhớ:

* **Giới hạn hữu hạn tại 1 điểm:**

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ với $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

e) Nếu $f(x) \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ f) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

* **Giới hạn một bên:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

* **Giới hạn hữu hạn tại vô cực:** (cách giải tương tự như dãy số)

* **Giới hạn vô cực:** a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)] = -\infty$

* **Đặc biệt:** a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

Chú ý: a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, c là hằng số

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$, c là hằng số

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

* **Quy tắc tìm giới hạn:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
L < 0		−	$-\infty$
		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

📌 Bài tập

Bài 1: Cho $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{3\sqrt{x}}$ Tìm $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Bài 2: Cho $f(x) = 5x^3 - 2x + 7$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Bài 3: Cho $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-x+3}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(x-3)}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x + 1}{2x + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2\sqrt{x} + 5)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 3x + 2}$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{-x^2 + x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{-x^2 + 4}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 5x + 6}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right)$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^2 + 4x - 5}$

n) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 5x - 4}{x - 4}$

p) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 5x^2 + x + 1}$

Bài 5: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1}}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{3-2x}}{x^2 + 3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$

Bài 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{2x^2 - 5x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{9+x} - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 + 2x - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Bài 7: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{5 - x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 4}{3x^3 - x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - 3x - x^2}{3x^3 + 2x - 1}$

Bài 8: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}$

Bài 9: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{x^2 - x + 1})$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$

Bài 10: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2 + 3x - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 - 5x^2 + 1})$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 2x + 5})$

Bài 11: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{4x^2 - 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 32}{x^4 - 16}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1 - x)^2}$

Bài 12: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{3})^+} \frac{5x - 7}{3x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{5 - 5x}$ c) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3}$
 d) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{5 - 7x}{2x + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x + 1}{x + 2}$ f) $\lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{-x + 4}{x + 7}$ g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x + 2}{1 - x}$

Bài 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} + 5}{5x + 1}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} + 5}{5x + 1}$.

Bài 14: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 2x + 1}}{5 - 2x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x(-x + 7)}{3x^2 - x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (7x - 3 - 2x^3)$

Bài 15: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x + 10}{x^2 + 2x}$

Bài 16: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \left(\frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x - 2} \right)$

Bài 17: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x + 2}}{3 - \sqrt{4x + 1}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x}}{x}$

Bài 18: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x + 11} - \sqrt{x + 7}}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 11} - \sqrt[3]{43 + 8x}}{2x^2 + 3x - 2}$

Bài 19: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x + 5}{2 - 3x - x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 - 2x + 7}{3x^5 - 4x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)^2 (7x^2 + 2)}{(2x + 3)^4}$

Bài 20: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 1 + 4x}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\sqrt{x} - x}{x + 2}$

Bài 21: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - \sqrt{x^2 - x + 1})$

Bài 22: Tính các giới hạn sau:

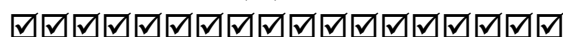
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Bài 23: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 4x + 16}{4 - x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)^2 (3x + 5)}{5x^2 - 3}$

Bài 24: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x - 5}{x - 4}$ c) $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3 - 8x}{4x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 - x + 7}{2x + 6}$



BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

Kiến thức cần nhớ:

1) Hàm số liên tục tại 1 điểm:

Cho $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì $f(x)$ **liên tục** tại x_0 .

b) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì $f(x)$ không liên tục tại x_0 hay $f(x)$ **gián đoạn** tại điểm x_0

2) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

3) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

4) Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm c sao cho $f(c) = 0$

Bài tập

Bài 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 12 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ \frac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$ tại $x_0 = 4$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 8}{4 - x^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ x + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{khi } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$

Bài 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{x^2 - x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 7x - 8}{x + 8} & \text{khi } x \neq -8 \\ -9 & \text{khi } x = -8 \end{cases}$ tại $x_0 = -8$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0 \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -2$$

Bài 3: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{6 - 2x} & \text{khi } x > 3 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 3 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{khi } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 5$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > -1 \\ -x + 3 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -1$$

Bài 4: a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 5 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$.

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 5 - 8x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$.

Bài 5: Tìm a để hàm số liên tục:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a + x & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{khi } x \neq 1 \\ x^2 + (a^2 - 1)x - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4 - x}{x + 2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

Bài 6: Tìm m để hàm số liên tục:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 3mx + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{khi } x > -2 \\ mx^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3x-x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0$$

Bài 7: Chứng minh rằng

a) Phương trình $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$

b) Phương trình $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ có 2 nghiệm thuộc $(-1; \sqrt{3})$

c) Phương trình $x^3 - 7x - 5 = 0$ có ít nhất hai nghiệm

d) Phương trình $2x^5 - 7x^2 + 3 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm nằm trong khoảng $(-4; 3)$

Bài 8: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{3-x} & \text{khi } x \neq 3 \\ -27 & \text{khi } x = 3 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 3$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ -1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+8}-3}{1-x} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{1}{6} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ tại } x_0 = \sqrt{2}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}-3}{4-x^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2$$

Bài 9: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+4}{x^3+1} & \text{khi } x > -1 \\ 1 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+5x+6} & \text{khi } x > -2 \\ x+4 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{4}x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1$$

Bài 10: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5-x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Bài 11: Định a để hàm số sau liên tục:

HÌNH HỌC

CHƯƠNG III: VECTO TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1: VECTO TRONG KHÔNG GIAN

 Kiến thức cần nhớ:

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Phép cộng vector:

Qui tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Qui tắc hình bình hành: Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Qui tắc hình hộp:

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

2. Nhân một số k với một vector $\vec{a}$: $k\vec{a}$ là một vector:

- Cùng phương với $\vec{a}$
- Ngược hướng với $\vec{a}$ (nếu $k < 0$)
- Cùng hướng với $\vec{a}$ (nếu $k > 0$)
- Có độ dài $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Tính chất:

$\square I$ là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (M là một điểm bất kỳ trong không gian).

$\square G$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (M là một điểm bất kỳ trong không gian).

3. Điều kiện cùng phương của hai vector:

$\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$.

Hệ quả: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} : z\overrightarrow{MA} + (1-z)\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

II. SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA CÁC VECTO.

1. Định nghĩa: Ba vector được gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng song song với một mặt phẳng.

2. Điều kiện để ba vector đồng phẳng:

Định lí 1: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector không cùng phương. Khi đó:

Điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số thực m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.

Hệ quả: Cho vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Nếu m, n, p là các số thực và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

3. Phân tích một vector theo ba vector không đồng phẳng:

Định lí 2: Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vector không đồng phẳng thì với vector $\vec{v}$ bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa các số m, n, p là duy nhất.

Bài tập

Bài 1: Cho 6 điểm A, B, C, D, E và F. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

Bài 2: Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

$$\text{b) } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{GF}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$

Bài 3: Cho hình hộp ABCD. EFGH. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Baøi 4: Cho hình choùp S. ABCD coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh taâm O. Chöùng minh raøng:

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$

b) Tính tổng: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$

Bài 5: Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$.

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4 \cdot \overrightarrow{PI}$

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm trên đoạn SO sao cho $\overrightarrow{SO} = 5\overrightarrow{IO}$, P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng

a) $\vec{IS} + \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 5 \cdot \overrightarrow{PI}$

Bài 8: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BC_1}$

Bài 9: Cho tứ diện $ABCD$.

a) Xác định điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

b) Xác định điểm F sao cho $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Bài 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{A'D}$

Bài 11: Cho tứ diện $ABCD$ với I là trung điểm CD . Xác định điểm J sao cho

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{IJ}$$

Bài 12: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi I là trung điểm MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}.$

b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4 \cdot \overrightarrow{PI}$.

Bài 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là tâm của hình bình hành $AA'B'B$; G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh $GI \parallel CG'$.

Bài 14: Cho tứ diện $ABCD$, E là trung điểm của AC , F là một điểm thuộc đoạn AB sao cho $FB = 3FA$

a) Xác định giao điểm G của mặt phẳng (DEF) với đường thẳng BC và tính tỉ số $\frac{GC}{GB'}$.

b) Gọi H là trung điểm của DE , I là một điểm thuộc đoạn DF sao cho $DI = \frac{2}{5}DF$. Chứng minh rằng ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Bài 15: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, AD vuông góc với AB và AC , $AD = a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, AE . Chứng minh AF vuông góc với CD .

Bài 16: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi E là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AE$, F là một điểm thuộc cạnh CD sao cho $CD = 4CF$. Tính độ dài đoạn EF .

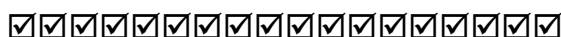
Bài 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, BD, DA sao cho $MC = 3MA, NC = 2NB, BP = 2PD, 3QA = 4QD$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Bài 18: Cho hình tứ diện $ABCD$; I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

a) Gọi (P) là mặt phẳng chứa BC và song song với AD . Chứng minh $IK \parallel (P)$.

b) Một mặt phẳng (Q) qua IK , cắt BC tại E , cắt AD tại F . Chứng minh BA, EF, CD đồng phẳng.

c) Nếu $IK \perp AB, IK \perp EF$ thì $IK \perp EF$ tại O và O là trung điểm EF .



BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Kiến thức cần nhớ:

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

1. Góc giữa hai vector.

Trong KG cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Từ một điểm A bất kỳ vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc BAC trong mặt phẳng (ABC) là góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v}) = BAC$.

2. Tích vô hướng của hai vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

3. Tính chất:

☐ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

☐ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

☐ $|\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2$.

☐ $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

☐ $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

☐ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng: Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm O bất kì lần lượt song song với a và b . Kí hiệu: $(a, b) = \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$.

2. Hai đường thẳng vuông góc: Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng 90° . Kí hiệu $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.

3. Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a, b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 90^\circ$.
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Cho hai đường thẳng song song. Nếu có một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì nó cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.
- Trong KG hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

📌 Bài tập

Bài 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của cạnh AC . Hãy tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây?

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$
- $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

Bài 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là các tam giác đều. Xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây?

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C'}$
- $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$

Bài 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình vuông cạnh a . Xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây?

- $\overrightarrow{B'D}$ và $\overrightarrow{A'D'}$
- $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{DA'}$
- $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{DB'}$

Bài 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- Tính góc giữa AB' và BC'
- Tính góc giữa AC' và CD' .
- Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$. Tính góc giữa MN và $C'D'$; BD và AD' .

Bài 6: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Bài 8: Cho tứ diện $ABCD$.

- Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AB vuông góc với CD là:

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$

b) Chứng minh rằng nếu $AB \perp CD, BC \perp AD$ thì $AC \perp BD$.

Bài 9: Trong không gian cho bốn điểm O, A, B, C thỏa mãn:

$\vec{OA} + 4\vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$ và $(\vec{OA} - \vec{OB})^2 = (\vec{OB} - \vec{OC})^2 = (\vec{OC} - \vec{OA})^2$. Chứng minh rằng OA vuông góc OC.

Bài 10: Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì?

Bài 11: Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AD.

a) Chứng minh rằng tam giác IJK vuông cân tại J.

b) Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

Bài 12: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O. Biết rằng $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng

a) $AC \perp SD$

b) $BD \perp SA$.

Bài 14: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Chứng minh rằng $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$.

TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho dãy số (u_n) . Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$
 A. $L = 0$. B. $L = +\infty$. C. $L = 2$. D. $L = -2$.
- Câu 2:** Cho dãy số $(u_n), u_n \geq 0$. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a \geq 0$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n}$
 A. $L = 0$. B. $L = a^2$. C. $L = a$. D. $L = \sqrt{a}$.
- Câu 3:** Chọn kết quả sai
 A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$.
- Câu 4:** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3n+7}$.
 A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{1}{7}$. D. 0.
- Câu 5:** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n-2} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tính $b - a$
 A. 5. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. -1.
- Câu 6:** Giới hạn của dãy số nào sau đây bằng 0?
 A. $\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$. B. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$. C. $\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$. D. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.
- Câu 7:** Biết $(u_n), (v_n)$ là hai dãy số thỏa mãn $\lim u_n = -2$ và $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim[2u_n + v_n]$ bằng
 A. 1. B. 3. C. -1. D. 2.
- Câu 8:** Biết $(u_n), (v_n)$ là hai dãy số thỏa mãn $\lim(u_n + v_n) = 2$ và $\lim(u_n - v_n) = 0$. Khi đó $\lim[2u_n + v_n]$ bằng
 A. 1. B. 3. C. -1. D. 2.
- Câu 9:** Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0, \forall n$. Chọn kết quả đúng
 A. $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. B. $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$. C. $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$. D. $\lim \frac{u_n}{v_n} = a$.
- Câu 10:** Tính $\lim(n^2 - 2n + 1)$.
 A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.
- Câu 11:** Chọn kết quả sai
 A. $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. B. $\lim \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$.
 C. $\lim \left(\frac{\pi}{3}\right)^n = 0$. D. $\lim (0,7)^n = 0$.
- Câu 12:** Tính $\lim \sqrt{4n^3 - 3n + 9}$.
 A. 4. B. 2. C. 3. D. $+\infty$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = n^2$. Kể từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi thì u_n lớn hơn một triệu?

- A. 1000. B. 999. C. 1001. D. 1002.

Câu 14: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n \cdot 3^n}$.

- A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Câu 15: Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn vô hạn?

- A. $u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$. B. $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. C. $u_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$. D. $u_n = \frac{n^2+1}{n \cdot n+1}$.

Câu 16: Chọn mệnh đề **sai**?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^n = +\infty$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} = +\infty$.

Câu 17: Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x-1}$.

- A. 3. B. 1. C. -5. D. $+\infty$.

Câu 18: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\infty$. B. 1. C. $+\infty$. D. -2.

Câu 19: Tìm giá trị m để $\lim_{x \rightarrow -1} (mx^2 + 3x - 2m) = 0$

- A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = 3$.

Câu 20: Cho a là một số thực khác 0. Tính $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

- A. 0. B. a . C. $2a$. D. a^2 .

Câu 21: Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 + x} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tính $a^2 + b^2$

- A. 13. B. 10. C. 9. D. 7.

Câu 22: Cho $f(x) = x^2 - 2x$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1}$

- A. -1. B. 2. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 23: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{4}$. B. 4. C. 0. D. -2.

Câu 24: Biết $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-2}{x-24} = a$. Giải phương trình $ax - 6 = 0$ ta có nghiệm

- A. $x = 0$. B. $x = 5$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 25: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ là:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\infty$. C. $\frac{1}{3}$. D. $+\infty$.

Câu 26: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3x+2}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 27: Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 - 7x + 2) = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 7x + 2) = +\infty$
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 - 7x^3 + 2) = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 7x^3 + 2) = +\infty$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-4; 4]$ để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^3 + 3x + m) = +\infty$

- A. 9 B. 4 C. 3. D. 5.

Câu 29: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x < 1 \\ 2x^2 - x + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 1$

- A. $a = 3$ B. $a = 1$ C. $a = 2$. D. $a = -2$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{khi } x < 2 \\ 2x^2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tính $f(3) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

- A. 28 B. -8 C. 18. D. 10.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{khi } x < 0 \\ x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f(1) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

- A. -1 B. 3 C. -1. D. -2.

Câu 32: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x+5}{8x+3}}$ là:

- A. $-\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 33: Hàm số nào dưới đây **không** liên tục tại $x = 2$?

- A. $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-2}$. B. $f(x) = \frac{2}{x-2}$. C. $f(x) = \frac{x}{x+2}$. D.
 $f(x) = \frac{11}{x-22}$.

Câu 34: Hàm số nào dưới đây liên tục tại $x = 2$?

- A. $f(x) = \frac{x+3}{2x-2}$. B. $f(x) = \frac{3}{2x-2^2}$. C. $f(x) = \frac{x}{x-2}$. D.
 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{11x-22}$.

Câu 35: Hàm số nào dưới đây **không** liên trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = (x+1)^2$. B. $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$. C. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$. D.
 $f(x) = \sin(x-1)$.

Câu 36: Hàm số nào dưới đây liên trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = \sqrt{x-1}$. B. $f(x) = \frac{x-11}{x-1}$.

C. $f(x) = \frac{8}{x^2}$.

D. $f(x) = (x-1)^3$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ x-3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 3$.

C. Hàm số gián đoạn tại $x = -2$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x = 4$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Xét các mệnh đề sau:

Mệnh đề I: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

Mệnh đề II: Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$

Mệnh đề III: Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

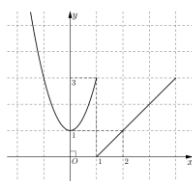
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm nào sau đây?

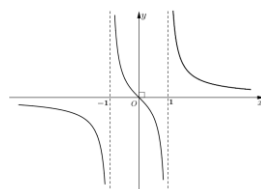
A. $x_0 = 1$.

B. $x_0 = 2$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Trên $[-2; 2]$ hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm gián đoạn?

- A. 1. B. 2. C. $x_0 = 0$. D. $x_0 = 3$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2+2m+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. D. $(1; 2)$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \neq -2 \\ m^2+mx-8 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Tính tổng các giá trị của tham số m tìm được để hàm số liên tục tại $x=-2$

- A. -2. B. 2. C. -8. D. 3.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1)=2, f(5)=10$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình $f(x)=6$ vô nghiệm.
B. Phương trình $f(x)=7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
C. Phương trình $f(x)=2$ có hai nghiệm $x=1, x=5$
D. Phương trình $f(x)=7$ vô nghiệm.

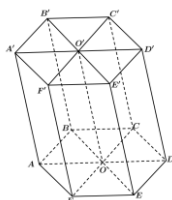
Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{khi } x > 1 \\ x^2+mx+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, với m là tham số. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định của nó là

- A. $\{-1; -2\}$. B. $\{-1; 2\}$. C. $\{1; 2\}$. D. $\{1; -2\}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \neq 2 \\ mx-8 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m tìm được để hàm số liên tục tại $x=2$

- A. $m=5$. B. $m=3$. C. $m=0$. D. $m=2$.

- Câu 46:** Cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau
- A. Phương trình có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.
 B. Phương trình vô nghiệm.
 C. Phương trình có ít nhất hai nghiệm.
 D. Phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(3;5)$.
- Câu 47:** Cho phương trình $x^5 + 3x^3 - 2 = 0$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau
- A. Phương trình có nghiệm trong $(0;1)$.
 B. Phương trình có nghiệm trên khoảng $(1;2)$
 C. Phương trình có nghiệm thuộc $(-3;0)$.
 D. Phương trình vô nghiệm
- Câu 48:** Phương trình $3x^5 + 5x^3 + 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(-2;-1)$. B. $(-10;-2)$. C. $(0;1)$. D. $(-1;0)$.
- Câu 49:** Cho hình bình hành $ABCD$. Chọn khẳng định đúng
- A. $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Câu 50:** Cho đoạn thẳng AB có I là trung điểm. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. C. $IA = IB$ D. $IA + IB = AB$
- Câu 51:** Cho tứ diện $ABCD$. Khi đó quy tắc ba điểm được phát biểu là:
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
- Câu 52:** Vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và bằng vector $\overrightarrow{AD}$ là:
- A. $\overrightarrow{A'D'}$. B. $\overrightarrow{DA}$ C. $\overrightarrow{DC}$ D. $\overrightarrow{AB}$
- Câu 53:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chọn khẳng định đúng
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HE} = 4\overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{BC}$.
- Câu 54:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chọn khẳng định đúng
- A. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG}$. B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.
 C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$. D. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{GD}$.
- Câu 55:** Cho tứ diện $ABCD$. Chọn khẳng định đúng
- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- Câu 56:** Cho hình lăng trụ $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, hai đáy là hai hình lục giác đều $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ có tâm lần lượt là O và O' như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu vector bằng $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối từ các điểm đã cho trong hình lăng trụ trên?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 57: Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.
 B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
 C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
 D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

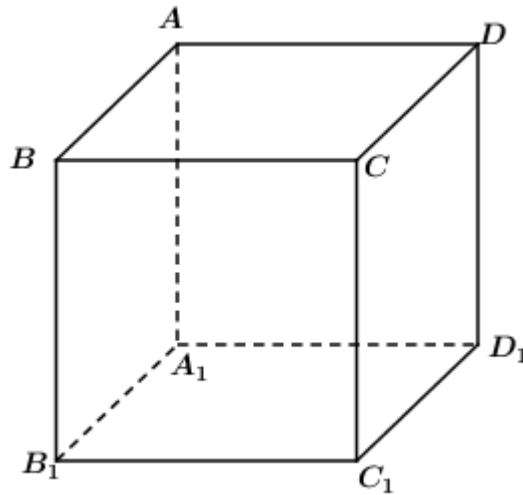
Câu 58: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Câu 59: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

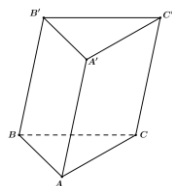
- A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
 C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Câu 60: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DD_1}$?



- A. 45° B. 90° C. 120° D. 60°

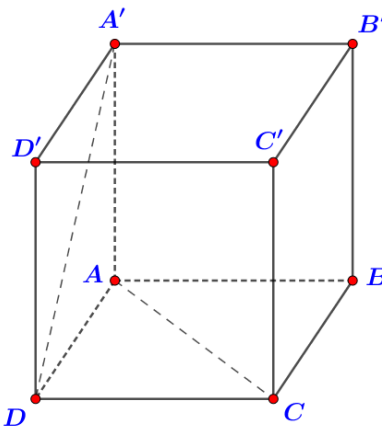
Câu 61: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



Vector nào sau đây là vec tơ chỉ phương của đường thẳng BC ?

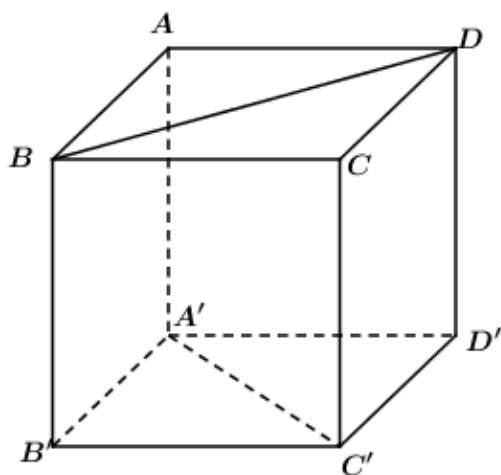
- A. $\overrightarrow{B'C'}$. B. $\overrightarrow{B'A}$. C. $\overrightarrow{B'C}$. D. $\overrightarrow{B'A'}$.

Câu 62: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



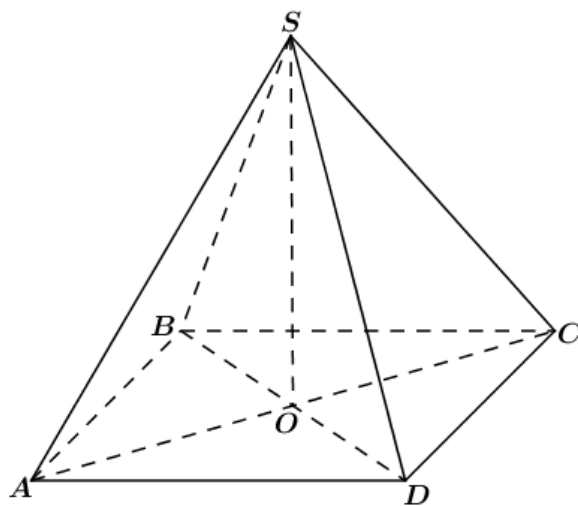
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 63: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó góc giữa hai đường thẳng $BD, A'C'$ bằng:



- A. 90° . B. 30° . C. 60° D. 45° .

Câu 64: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính góc tạo bởi SA và CD .



- A. 30° . B. 90° . C. 120° . D. 60° .